



Analysis of sound wave equations in spherical coordinates using Galerkin weighted residuals method and spherical harmonic functions

Taner Karasoy^{1*}, Mustafa Yağimli²

¹Istanbul Gedik University, Institute of Graduate Studies, Department of Occupational Health and Safety, 34876, Istanbul, Türkiye

²Istanbul Gedik University, Faculty of Engineering, Department of Computer Engineering, 34876, Istanbul, Türkiye

Highlights:

- Use of Galerkin weighted residuals method in solving sound pressure equations
- Effect of Spherical Harmonic Functions in determining sound intensity
- The role of the critical distance threshold concept in detecting near and far field sound propagation

Keywords:

- Spherical sound wave equations
- Galerkin weighted residual methods
- Spherical harmonic functions
- Sound pressure level

Article Info:

Research Article

Received: 06.10.2022

Accepted: 15.05.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1171452

Correspondence:

Author: Taner Karasoy

e-mail:

taner.karasoy@okan.edu.tr

phone: +90 505 567 9089

Graphical/Tabular Abstract

Sound propagates in space as spherical waves. The pressure amplitudes of spherical sound waves -unlike linear waves and planar waves- depending on the distance, and accordingly the sound intensity decreases (Figure A).

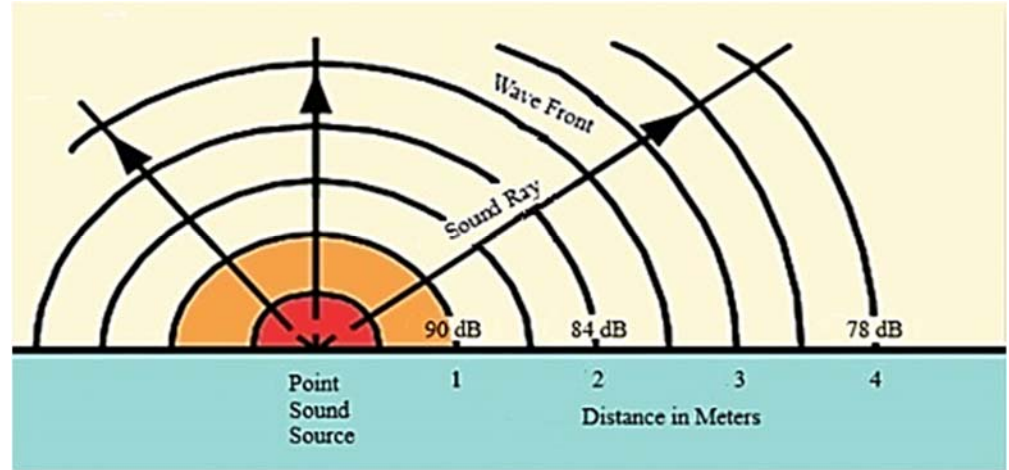


Figure A. Decrease in the intensity of the sound produced by a source with distance [1]

Purpose:

In this study, it is aimed to bring an unusual mathematical perspective by using semi-analytical mathematical solution methods, unlike the sound intensity determination formulas available in acoustics, and this scientific approach is supported by numerical data.

Theory and Methods:

Galerkin Weighted Residues Method (WRM) and Spherical Harmonic Functions, which have been used frequently in sound problems in recent years, are used for the solution of sound wave equations in spherical coordinates, which have not been observed in the literature before, in determining the periodic pressure values of sound.

Results:

Based on the directivity coefficient and spherical harmonic functions in detecting sound pressure levels in the near field, The Critical Distance Threshold, r_{cri} , was defined and combined with data from WRM. It has been observed that the Critical Distance threshold value provides very sensitive results in near field distance calculations. The importance of the number of weight functions of WRM in long distance calculations has especially emerged.

Conclusion:

The critical distance threshold value has an important place in all mathematical analyzes. In the determination of this value, the effect of spherical harmonic functions and the multiplicity of weight functions are clearly seen.



Küresel koordinatlarda ses dalga denklemlerinin Galerkin ağırlıklı artıklar yöntemi ve küresel harmonik fonksiyonlar yardımıyla analizi

Taner Karasoy^{1*}, Mustafa Yağimli²

¹İstanbul Gedik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, İş Sağlığı ve Güvenliği Bölümü, 34876, Kartal, İstanbul, Türkiye

²İstanbul Gedik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, 34876, Kartal, İstanbul, Türkiye

ÖNEÇIKANLAR

- Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminin ses basınç denklemlerinin çözümünde kullanımı
- Küresel Harmonik Fonksiyonların ses şiddeti belirlenmesinde etkisi
- Kritik Mesafe Eşiği kavramının yakın ve uzak alan ses yayılımının tespitindeki rolü

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 06.10.2022

Kabul: 15.05.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1171452

Anahtar Kelimeler:

Küresel ses dalga denklemleri,
Galerkin ağırlıklı artıklar
yöntemi,
küresel harmonik fonksiyonlar,
ses basıncı düzeyi

ÖZ

Ses basınç düzeyinin tespiti, gürültülü ortamlarda çalışan bireyler için önemli bir etmendir. Ses, büyük miktarlarda meydana geldiğinde o ortamda çalışan bireylerin sağlığını ve çalışma güvenliğini tehdit etmektedir. Ses şiddetini ölçmek için periyodik basınç değişikliklerinin belirlenmesi gerektiğinden bu konuda çok sayıda matematiksel analiz ve deneysel araştırma yapılmıştır. Sesin şiddet ölçümlerinde ve sesin mesafelere bağlı dağılım, azalma ve maruziyet analizlerinde klasik logaritmik denklemler kullanılmaktadır. Bu çalışmada sesin periyodik basınç değerlerinin belirlenmesinde daha önce literatürde gözlemlenmemiş olan küresel koordinatlardaki ses dalga denklemlerinin çözümü için Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi (GAAY) ve son yıllarda ses problemlerinden sıklıkla kullanılmaya başlanmış olan Küresel Harmonik Fonksiyonlar kullanılmıştır. Yakın alanda ses basıncı seviyelerinin tespitinde yönelme katsayısı ve küresel harmonik fonksiyonlara dayanarak Kritik Mesafe Eşiği, r_{cri} tanımlanmış ve GAAY'dan elde edilen verilerle birleştirilmiştir. Bu sayede elde edilen sayısal ses basıncı değerlerinin klasik logaritmik yaklaşımda kullanılan değerlere oldukça yakın olduğu tespit edilmiş ve bu sayısal veriler için yapılan logaritmik tutarlılık analizi sonucunda klasik logaritmik desibel denklemlerinden elde edilen verilerle yüksek oranda uygunluğu büyük oranda belirlenmiştir. Sonuç olarak hem akustik (ses) bilimine hem de iş sağlığı ve güvenliği bilimine farklı yarı analitik matematiksel çözüm yöntemleri kullanılarak alışılan dışında matematiksel bir bakış açısı getirilmesi hedeflenmiş ve sayısal verilerle bu bilimsel yaklaşım desteklenmiştir.

Analysis of sound wave equations in spherical coordinates using Galerkin weighted residuals method and spherical harmonic functions

HIGHLIGHTS

- Use of Galerkin Weighted Residual Method in solving sound pressure equations
- Effect of Spherical Harmonic Functions in determining sound intensity
- The role of The Critical Distance Threshold concept in detecting near and far field sound propagation

Article Info

Research Article

Received: 06.10.2022

Accepted: 15.05.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1171452

Keywords:

Spherical sound wave
equations,
Galerkin weighted residual
methods,
spherical harmonic functions,
sound pressure level

ABSTRACT

Detection of sound pressure level is an important factor for individuals working in noisy environments. When noise occurs in large quantities, it threatens the health and working safety of individuals working in that environment. Since it is necessary to determine periodic pressure changes to measure sound intensity, many mathematical analyzes and experimental studies have been carried out on this subject. Logarithmic equations are used in the intensity measurements of the sound and in the distribution, reduction and exposure analyzes of the sound depending on the distance. In this study, Galerkin Weighted Residues Method (WRM) and Spherical Harmonic Functions, which have been used frequently in sound problems in recent years, are used for the solution of sound wave equations in spherical coordinates, which have not been observed in the literature before, in determining the periodic pressure values of sound. Based on the directivity coefficient and spherical harmonic functions in detecting sound pressure levels in the near field, The Critical Distance Threshold, r_{cri} , was defined and combined with data from WRM. In this way, it was determined that the numerical sound pressure values obtained were very close to the values used in the classical logarithmic approach, and as a result of the logarithmic consistency analysis made for these numerical data.

*Sorumlu Yazar/Yazarlar / Corresponding Author/Authors : *taner.karasoy@okan.edu.tr, mustafa.yagimli@gedik.edu.tr /
Tel: +90 505 567 9089

1. Giriş (Introduction)

Ses, fiziksel olgular arasında en farklı şekilde meydana gelip yayılım gösteren, istenmeyen zamanlarda veya çok büyük miktarlarda ortaya çıktığında birey sağlığını ve çalışma güvenliğini tehdit edebilecek, bu sebeple ölçülmesi ve kontrolü zorunlu olan, en temel tanımıyla bir kaynaktan ortaya çıkıp hava veya herhangi bir ortamda meydana gelen periyodik basınç dalgalanmalarının işleme organları tarafından algılanmasıyla fark edilebilen bir enerji türüdür [1, 2]. Periyodik, tekrarlı ve dalgalı yapıya sahip bir fiziksel büyüklük olması, ses kaynağının ürettiği mili hatta mikrosaniyeler mertebesinde dalga genliklerindeki değişimlerin yol açtığı basınç şiddet düzeylerindeki değişimlerin ölçülendirilmesini, ayrıca detaylı analizlerinin yapılmasını gerekli kılmaktadır. Bu sebeple periyodik basınç değişimlerinin tespitinde birçok analiz metodu uygulanmış ve geliştirilmiştir [3]. Vo vd. [4] Düzgün dairesel bir kanalda ses basıncı yayılımı problemini formüle etmek için Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemini kullanmışlardır. Denklem sonuçlarından faydalanabilmek için ağırlık fonksiyonları trigonometrik seçmelerine rağmen genel dalga denkleminin imajiner üstel fonksiyonunu olarak iki boyutlu bir kanaldaki hem akış hem de dalga genlik değerlerini tespit etmişlerdir. Diğer çalışmalarda Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemini iki boyutlu geometriler için hem akışın olmadığı hem de akışın olduğu durumlarda düzgün olmayan kanallarda ses iletimini araştırmak için başarıyla analiz edilmiştir [5, 6]. Bu geometrilerde kullanılacak uygun temel fonksiyonların trigonometrik olduğunu ve bu hesaplamalar sonucunda oldukça verimli sonuçların çıkacağı tespit edilmiştir. Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi, ekstenel simetrik kanallara genişletildiğinde, çözümü temsil etmek için doğal olarak Bessel fonksiyonlarını kullanma eğilimi vardır. Fakat mevcut Bessel fonksiyonlarının bu modellerde verimsiz hesaplamaların ortaya çıktığı da tespit edilmiştir. Bu zorluğun üstesinden gelmek için, iki boyutlu durumda üretilenler aynı tip trigonometrik fonksiyonların temel fonksiyonlar olarak kullanılan asimetric problemler formüle edilmiştir. Bu durum hem akışsız durumda hem de akışlı durumda geçerli bir hesaplama sistematüğünü ortaya çıkarmış, ayrıca bunları sert duvarlı durumda ve yumuşak duvarlı durumda ses ötesi hızlar için değerlendirip Runge-Kutta nümerik yönteminden elde edilen "gerçek" değerlerle karşılaştırarak oldukça gerçekçi sonuçlar elde edilmiştir [7-9].

Ses enerjisinin küresel dalga yayılımı göstermesinden dolayı son yirmi yılda küresel harmonik fonksiyonlar hesaba katılarak yapılan bazı dikkate değer analizler göze çarpmaktadır. Bunlardan, Park vd. [10] küresel harmonik fonksiyonları kullanarak bir dizi ses kaynaklarından elde edilen sinyallerin yakın alan bilgisinin kullanımına odaklanarak, küresel bir mikrofon dizisi tarafından ölçülen sinyallerin işlenmesini analiz etmişlerdir. Küresel harmonik fonksiyonlara dayalı ses analizlerinde ve araştırmalarında sadece noktasal bir kaynaktan küresel ses yayılımında değil, huzme oluşturarak yayılımı konusunda da kayda değer çok fazla sayıda çalışma söz konusudur [11-15]. Battista vd. [16] diğer çalışmalardan en dikkate değer şekilde farklı olarak küresel harmonik fonksiyonların ayrıştırmasından yararlanıp farklı bir akustik kaynak haritalama ve ses huzme dağılımlarına dikkat çekmiştir. Bu çalışmada en dikkate değer nokta, Tikhonov formülasyonu ile ilişkili düzenleme faktörünü tahmin etmek için farklı yöntemler ve farklı düzenleme seviyeleri tespit edilmiş olmasıdır. Koutny vd. [17] Küresel harmonik fonksiyonlara dayalı olarak ses kaynaklarının mesafelerini belirlemek için yaptıkları çalışmada küresel bir mikrofon dizisinin yakın alan bilgisinin kullanımına odaklanarak ölçülen sinyallerin işlenmesi ile ilgilenmektedir. Küresel harmonik fonksiyon ayrıştırmasına dayalı bu işlemlerde fonksiyonların düşük frekanslı yaklaşımı kullanılarak, kaynak mesafesi belirlenmeye çalışılmıştır. Yapılan çalışmalara genel bir perspektifle bakıldığında sesin yayılımında küresel kısmi türevli

diferansiyel denklemlerin çok sık kullanılmadığı, kısmen küresel mikrofon dizileri ve huzme modellerinde sadece çözüm fonksiyonlarının kullanıldığı ve bu sebeple Galerkin Ağırlıklı Artıklar Metodunun sadece silindirik boruda ses ötesi ve ses altı akışlı durumlar için kullanıldığı net olarak fark edilmektedir.

Bu çalışmada ses yayılım denklemlerinin çözümünde farklı bir yaklaşım getirilmesi hedeflenmiştir. Küresel koordinatlara dayalı kısmi türevli diferansiyel akustik dalga denklemleri, küresel harmonik fonksiyonlar ve dalga fonksiyonu yardımıyla tek boyuta indirgenmiş ve sonrasında yapılan işlemlerle kısmi türevli diferansiyel denklemlerden tek değişkenli ve değişken katsayılı adı bir diferansiyel denklem türü olan Cauchy-Euler denklemine dönüştürülmüştür. Bu tip denklemlerin çözüm sistematüğü bağlamında mesafe parametresi r , logaritmik domene taşınarak τ parametresine bağlı ve sabit katsayılı bir adı diferansiyel denklem elde edilmiştir. Sonuç olarak bu denklemden ses şiddeti düzeylerinin hesaplanmasında literatürde çok nadir olarak ele alınan fakat birçok kısmi türevli diferansiyel denklemlere dayalı fiziksel problemin çözümünde etkili bir şekilde kullanılan Semi-Analitik bir matematiksel çözüm yöntemi olan Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi kaynaklı çözümler integral denklemleri yardımıyla tespit edilmiş ve literatürde yaygın olarak kabul gören, ses yayılımının hem matematiksel hem de fiziksel analizinde önemli bir yer edindiği için kabul görerek kullanılan Klasik Logaritmik Yaklaşım çözümlerinden elde edilen referans değerler ile sayısal karşılaştırmalar yapılmıştır.

2. Analitik ve Sayısal Yöntem (Analytical and Numerical Methodology)

Bu çalışmada D'Alembert dalga denklemindeki Laplasiyen operatörü Eş. 1 gibi küresel koordinatlara göre alınmıştır.

$$\nabla^2 = \Delta(r, \theta, \phi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (1)$$

Eş. 1'de yer alan Laplasiyen operatörü, Eş. 2'deki homojen basınç denklemine uygulanacaktır.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) P = 0 \quad (2)$$

Bu denklemde P basınç fonksiyonu için analitik çözüm, değişkenlere ayrıştırma yöntemi Eş. 3 ile bulunabilir.

$$P(r, \phi, \theta, t) = p_0 \Psi(r, \phi, \theta, t) = p_0 R(r) \Phi(\phi) \Theta(\theta) T(t) \quad (3)$$

Bu yaklaşımdan da görülebileceği gibi dalga (özdeğer) fonksiyonu (Ψ) basınç genlik değerinden (p_0) bağımsız olarak hareket eden ancak kartezyen koordinatlardan farklı olarak küresel koordinatlar bağlamı genlik değerini yönlendiren bir yapıya sahiptir.

Eş. 2'nin genel analitik çözümü, gerçek (reel) sonuç olarak Eş. 4'de görülen genel biçimdedir:

$$P(r, \phi, \theta, t) = \text{Reel} \left[(-ik [P_+ h_1(kr) - P_- h_2(kr)]) e^{-i\omega t} \cdot Y_1^m(\phi, \theta) \right] \quad (4)$$

Sağa ve sola giden dalgaların basınç genliklerinin aynı olduğu hesaba katıp Eş. 4 daha sade bir şekilde yazılırsa denklem Eş. 5 de yazıldığı biçimde olacaktır:

$$P(r, t, Y_1^m) = \text{Reel} \left[\frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \cdot Y_1^m(\phi, \theta) \right] \quad (5)$$

Eş. 6'da görülen Tek boyutlu küresel dalga denkleminde Eş. 5'deki basınç fonksiyonu uygulanacaktır.

$$\frac{\partial^2(r \cdot P(\tau, \phi, \theta, t))}{\partial \tau^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2(r \cdot P(\tau, \phi, \theta, t))}{\partial t^2} \quad (6)$$

Bu durumda denklem, Eş. 7’de görüleceği gibi küresel harmonik fonksiyondan ve zaman domeninden bağımsız olarak;

$$r \cdot P''(r) + 2P'(r) + i \left[2k \left(r \cdot P'(r) + P(r) \right) \right] = 0 \quad (7)$$

olur.

Bu Eş. 7’nin bizim için önemli olan kısım reel (gerçek) kısımdır. Gerçek kısmı r ile genişletirsek Cauchy–Euler denkleminde dönüştürmüş oluruz.

Cauchy–Euler denklemlerinin genel çözüm metodolojisi, $r = e^\tau$ yani $\tau = \ln r$ biçiminde r domeninden logaritmik τ domenine taşıma biçiminde olacaktır. Bu durumda Eş. 7’nin gerçek kısmı dönüştürüldüğünde Eş. 8 denklemini oluşturur ve Eş. 9 Robin Sınır Koşulları çerçevesinde çözüm aranır.

$$P''(\tau) + P'(\tau) = 0 \quad (8)$$

Robin Sınır Koşulları;

$$\begin{aligned} \tau=0, P(\tau=0) &= P_{in} \\ \tau=0, P(\tau=0) + P'(\tau=0) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Basınç başlangıç değeri, $P_{in} = p_0 \cdot 10^{\frac{Lw}{20}}$ formülünden belirlenmiştir.

Bu çalışma bağlamında çözüm yapılacak diferansiyel denklem Robin Sınır Koşulları çerçevesinde Eş. 10’de gösterilen Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi uygulanmıştır.

$$\int_n R \cdot [W]_{N \times 1} d\tau = 0 \quad (10)$$

Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemine göre yaklaşık basınç fonksiyonu, hesaplanacak katsayılar ve ağırlık fonksiyonlarını içerecek şekilde Eş. 11’de görüldüğü biçimde yazılmalıdır.

$$\begin{aligned} P(\tau) &\cong c_0 + c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + \dots + c_N \cdot w_N \\ &\cong c_0 + \sum_{i=1}^N c_i \cdot \tau^i \end{aligned} \quad (11)$$

Ağırlık fonksiyonlarının polinomik olarak alınması, çözüm stabilitesi açısından faydalı olacaktır. Çünkü bilindiği gibi her tür matematiksel fonksiyon (Trigonometrik, Logaritmik, Üstel, Hiperbolik vs.) Taylor Serisi yardımıyla polinomik olarak ifade edilebilmektedir. Bu işlemlerin sonucunda elde edilen katsayılar, N ağırlık fonksiyonu sayısı çok miktarda alındıkça Taylor serisine yakınsama gösterip ulaşılmak istenen gerçek fonksiyon değerlerine yaklaşacaktır.

Bu durumda artık fonksiyon, Eş. 12’deki şekilde tanımlanır:

$$R = L(P) = \frac{d^2}{d\tau^2}(P) + \frac{d}{d\tau}(P) \quad (12)$$

Türevli yaklaşık basınç fonksiyonu değerleri Eş. 13’deki şekillerde tanımlanacaktır:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(P) &\cong c_1 + \sum_{i=2}^N i \cdot c_i \cdot \tau^{i-1} \\ \frac{d^2}{d\tau^2}(P) &\cong 2 \cdot c_2 + \sum_{i=3}^N i \cdot (i-1) \cdot c_i \cdot \tau^{i-2} \end{aligned} \quad (13)$$

Bu değerler, Eş. 12’ye uygulandığında Eş. 14’ü elde etmiş oluruz.

$$R(\tau) = c_1 + \sum_{i=2}^N i \cdot c_i \cdot \tau^{i-1} + 2 \cdot c_2 + \sum_{i=3}^N i \cdot (i-1) \cdot c_i \cdot \tau^{i-2} \quad (14)$$

İntegral hesaplamaları genel olarak Eş. 15’deki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} \int_n R \cdot \tau d\tau &= 0 \\ \int_n R \cdot \tau^2 d\tau &= 0 \\ \vdots \\ \int_n R \cdot \tau^N d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Bu durumda elde edilen çözüm sistematığının matris gösteriminin Eş. 16 ve vektörel ortogonalite sebebiyle ortaya çıkacak skaler çarpım kaynaklı doğrusal denklem sisteminin istediğimiz nihai sonuçları vermesi mümkün olmaktadır.

$$[I]_{N \times N} \cdot [C]_{N \times 1} = [O]_{N \times 1} \quad \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Fakat normal şartlarda 2. Robin Sınır Koşulundan oluşan c_1 katsayı değeri dikkate alınmadan doğrusal denklem sistemini çözmek istersek bütün katsayı değerleri sıfır çıkar ki bu da istediğimiz bir sonuç değildir. Bu sebeple 2. Robin Sınır Koşuluna dayanarak $c_1 = -P_{int}$ alınıp $w_1 = \tau$ değeri içeren integral terimi ihmal edildiğinde $I_{...1}$ integral sonuç terimleri değişse de tekrar yazılır ve doğrusal denklem sistemi bir satır ve sütun azalır sonuç vektörü 0’dan farklı olarak denklem sistemi, Eş. 17’deki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} c_2 I_{22} + c_3 I_{23} + \dots + c_N I_{2N} &= P_{int} I_{21} \\ c_2 I_{32} + c_3 I_{33} + \dots + c_N I_{3N} &= P_{int} I_{31} \\ \vdots & \\ c_2 I_{N2} + c_3 I_{N3} + \dots + c_N I_{NN} &= P_{int} I_{N1} \end{aligned} \quad (17)$$

Elde ettiğimiz denklem sistemleri çözümlendikten sonra elde ettiğimiz katsayı değerleri, Eş. 11’deki yaklaşık ses basıncı fonksiyonu polinomuna yerleştirilerek ses basıncı değerleri tayin edilmiştir. Elde edilen sonuçlar ve karşılaştırmalar tablolar halinde analiz edilmiştir.

3. Sonuçlar ve Tartışmalar (Results and Discussions)

Bu çalışmada Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminde elde edilen tüm sonuçlar, daha önce doğruluğu denetlenmiş ve teyit edilmiş Serbest Alanda Sesin Yayılması Denklemiyle (Klasik Logaritmik Yaklaşım) Eş. 18 karşılaştırılmıştır.

Serbest Alanda Sesin Yayılma Denklemi (Klasik Logaritmik Yaklaşım):

$$\begin{aligned} L_P &= L_W + \log \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^{10} \\ L_P &= \log \left(\frac{P}{P_0} \right)^{20} \\ L_W &= \log \left(\frac{w}{w_0} \right)^{10} \end{aligned} \quad (18)$$

Bu denklemlere dayanarak en sağlıklı “gerçek” değerlerin elde edebilmesi için Kritik Mesafe Eşiği $\left(r_{kri} = \sqrt{\frac{Q}{4\pi}} \right)$ tanımı yapılmıştır. Bu eşitlik, Galerkin Ağırlıklı Artıklar Metodunda Küresel Harmonik Fonksiyonlara bağlı olarak $(r_{kri} = \sqrt{Q \times Y_1^{10}})$ değerlendirilecek ve

desibel hesaplarındaki önemi vurgulanacaktır. r_{kri} değerinin yakın alan ses ölçümlerinde oldukça büyük bir önem arz ettiği ve alınan mesafe değerinin bu kritik eşik değerinin altında veya eşit alındığında hem Klasik Logaritmik Yaklaşımına göre hem de Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemine göre fiziki olarak gerçekleşmesi mümkün olmayan değerlerin çıkacağı yakın alan analiz tablolarında gösterilecektir. Bu sebeple hem fiziki hem de matematiksel tutarlılık için $\left(\frac{r_{kri}}{r} < 1\right)$ oranının gösterildiği biçimde bütün çalışma 1'den küçük değerler dikkate alınarak yapılmıştır.

Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminde elde edilen basınç değerleri P_r , küresel harmonik fonksiyonlara bağlantılı olarak elde edilmiş bu r_{kri} değeri ile çarpılarak desibel hesaplama formülünden ses düzeyleri hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır. Küresel harmonik fonksiyonların enlem ve boylam katsayıları ses yayılımının küresel bir biçimde yayıldığı düşünüldüğü için bu çalışmada $m=0, l=0$ olarak alınmıştır. Karşılaştırmalar için kurgulanan farklı yönlendirmeli ses yayılım "durum"ları oluşturulmuştur. Analiz sonuçları, desibel ve hata yüzdeleri tabloları ile net olarak gözlemlenmiştir.

Atmosferik Sönümlenme ile Ses Basıncının Düşmesi (Yutulama) veya birçok kaynakta belirtildiği gibi Havanın Yutma (Sönüm) Etkisi ile Ses Basıncındaki Azalma parametresi kısa mesafeli ölçümler için çoğu desibel hesabı modellemesinde ihmal edilse de kimi zaman atmosferik koşullar ihmal edilemez durumlar meydana getireceği için hesaba katılmak zorundadır.

Mesafeye bağlı Hava veya Atmosferik Sönümlenme (Yutulama) Denklemi, $t=20$ °C için Eş. 19'da ki şekilde tanımlanır:

$$A_{atm} = \frac{7.4 \cdot 10^{-8} f^2 \cdot r}{\phi} \quad (19)$$

Denklemden de görüleceği gibi yüksek frekanslarda havanın sesi sönümlenme etkisi, daha da fazla olmaktadır. Bu nedenle düşük frekanslı sesler, uzak mesafelere ($r \gg r_{kri}$) kadar ulaştığında belirli bir eşik değerden sonra duyulmaları söz konusu değildir. Bu eşik değeri, matematiksel denklemlerle çok kolay tespit edilebilmektedir. Fakat analiz örneklerinde de görüleceği gibi yüksek mesafelere çıkılınca Galerkin Ağırlıklı Artıklar Metodu sağlıklı sonuçlar vermediği için bu eşik değeri hesaplamasına bu çalışmada girilmemiştir.

Sayısal çözümlerin tespitlerinde yapılacak analizler için çeşitli kısıt faktörlerinin önemi, fiziksel durum ve yaklaşımlara farklı bakış açılarının getirilmesinde büyük önem getirmektedir. Önerilen "Durumlarda" bunları açık bir şekilde göstermektedir.

Durum 1:

Hareketli olmayan, hava sönümlenme (yutulama) etkisi ihmal edilmiş ($A_{atm} \cong 0$), boşlukta herhangi bir engelle karşılaşmayan ($Q=1$) rastgele bir noktasal kaynaktan 90 dBlik bir ses şiddetinin düzgün periyodik yayılımı (gürültü olmayan) için yapılan Klasik Logaritmik Yaklaşım (KLY) ve $N = 3, 4, 5, 7$ ve 10 adet ağırlık fonksiyonu için Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi (GAAY) yardımıyla çözülen küresel koordinatlara dayalı analizlerden elde edilen sonuçların karşılaştırılması Tablo 1'de incelenmiştir.

Hassasiyetlerin tespit edilebilmesi açısından virgülden sonra 3 ondalık değer alınarak sapma oranları daha detaylı olarak gözlemlenme olanağı sağlanmıştır. Buna ek olarak Klasik Logaritmik Yaklaşım referans alınarak yapılan hata payı analizi yüzde cinsinden hesaplanmıştır. Bu yüzde değerleri elde edilirken her N değeri için mesafeye bağlı bulunan desibel değerleri ile Klasik Logaritmik Yaklaşım değerleri çıkartılıp o mesafedeki Klasik Logaritmik Yaklaşım değerleriyle oranlanarak yüzde değerleri tespit edilmiştir. (Hata Payı % = $\frac{KLY-GAAY}{KLY}$ %)

Tablo 2. 5 m boyunca ses yayılım değerlerinin Hata Payı yüzdeleri (Error percentages of sound propagation values over 5 m)

Mesafe (m)	Hata Payı (%)				
	N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
0,5	0,33%	0,08%	0,02%	0,00%	0,00%
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
1,5	0,08%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
2	0,20%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%
2,5	0,31%	0,03%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,44%	0,04%	0,00%	0,00%	0,00%
3,5	0,61%	0,04%	0,00%	0,00%	0,00%
4	0,87%	0,03%	0,01%	0,00%	0,00%
4,5	1,25%	0,01%	0,02%	0,00%	0,00%
5	1,81%	0,09%	0,04%	0,00%	0,00%

Tablolardan da görülebileceği gibi (Tablo 2-Tablo 6) özellikle düşük ağırlık fonksiyonlu $N = 3$ yaklaşımındaki hata payı yüzdesinde "gerçek" değerlerden sapma oldukça yüksek oranda söz konusudur. $N = 4$ den sonra özellikle de $N = 5$ Ağırlık fonksiyonu adedinden sonra hata paylarında dramatik bir azalma ve "gerçek" matematiksel değere yüksek oranda yakınsama görülmektedir. Ağırlık fonksiyonu artırıldığında özellikle de $N \geq 7$ alınarak yapılan analizlerde artık "gerçek" değerlerin bulunduğu kaçınılmaz bir hal almaktadır. Bunlara ek olarak, mesafe arttıkça düşük ağırlık fonksiyonlu analizlerde ($N \leq 5$) hata payı değerlerinde gözlemlenebilir bir artış söz konusu olmaktadır. Bu sebeple sağlıklı sonuçların alınabilmesi için $N \geq 5$

Tablo 1. 90 dB bir ses kaynağının 5 m boyunca ses yayılım değerleri. ($Q = 1$) (Sound propagation values over 5 m of a 90 dB sound source. ($Q = 1$))

Mesafe (m)	Klasik Logaritmik Yaklaşım (dB)	Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi (dB)				
		N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
0	90	90	90	90	90	90
0,5	85,029	84,752	84,958	85,015	85,028	85,029
1	79,008	79,008	79,008	79,008	79,008	79,008
1,5	75,486	75,425	75,480	75,486	75,486	75,486
2	72,987	72,840	72,974	72,986	72,987	72,987
2,5	71,049	70,826	71,029	71,048	71,049	71,049
3	69,465	69,160	69,438	69,464	69,465	69,466
3,5	68,127	67,710	68,097	68,124	68,127	68,127
4	66,967	66,384	66,945	66,961	66,967	66,968
4,5	65,944	65,117	65,948	65,931	65,943	65,945
5	65,029	63,855	65,085	65,004	65,028	65,030

Tablo 3. 0 ve 1 m arasındaki Yakın Alan Ses Yayılım Değerleri
(Near Field Sound Propagation Values between 0 and 1 m)

Mesafe (m)	Klasik Logaritmik Yaklaşım (dB)	Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi (dB)				
		N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
0	90	90	90	90	90	90
0,1	99,008	95,606	97,445	98,370	98,931	99,007
0,2	92,987	91,344	92,361	92,784	92,973	92,987
0,3	89,465	88,570	89,172	89,386	89,462	89,466
0,4	86,967	86,465	86,823	86,934	86,966	86,967
0,5	85,029	84,752	84,958	85,015	85,028	85,029
0,6	83,445	83,301	83,412	83,439	83,445	83,445
0,7	82,106	82,038	82,092	82,104	82,106	82,106
0,8	80,946	80,921	80,941	80,946	80,946	80,946
0,9	79,923	79,918	79,922	79,923	79,923	79,923
1	79,008	79,008	79,008	79,008	79,008	79,008

Tablo 4. Yakın Alan Hata Payı Yüzdeleri (Near Field Error Percentages)

Mesafe (m)	Hata Payı (%)				
	N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
0,1	3,44%	1,58%	0,64%	0,08%	0,00%
0,2	1,77%	0,67%	0,22%	0,02%	0,00%
0,3	1,00%	0,33%	0,09%	0,00%	0,00%
0,4	0,58%	0,17%	0,04%	0,00%	0,00%
0,5	0,33%	0,08%	0,02%	0,00%	0,00%
0,6	0,17%	0,04%	0,01%	0,00%	0,00%
0,7	0,08%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%
0,8	0,03%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
0,9	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

durumunda Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminde yapılacak analizler daha önem kazanmaktadır.

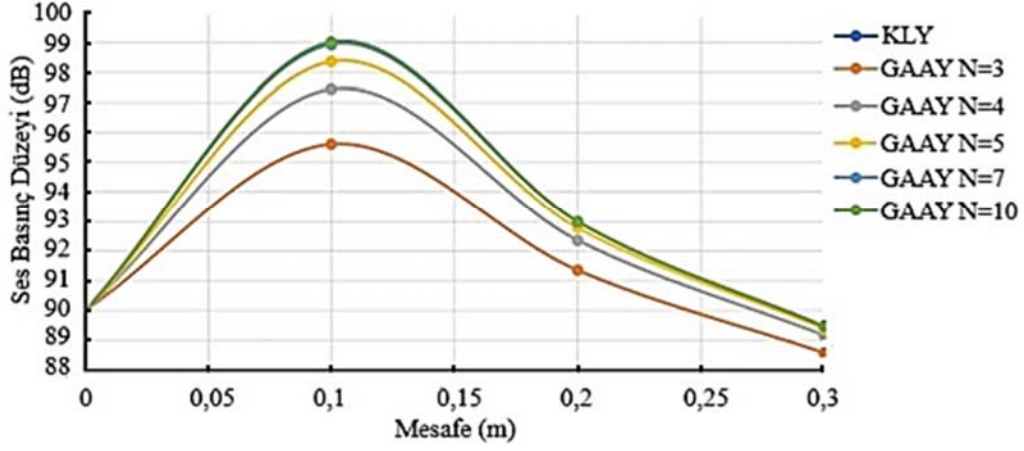
Aynı çalışmanın uzak ve yakın alan analizleriyle ilgili tablolar incelendiğinde bazı dikkate değer sonuçların gözlemlenmesi kaçınılmaz olmaktadır. Yakın alan ($r < 1$) desibel değerleri ve hata payı tabloları incelendiğinde özellikle noktasal kaynağa çok yaklaşma söz konusu oldukça ($r \leq r_{kri}$) desibel değerleri Hem Klasik Logaritmik Yaklaşımında hem de Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminde analiz edildiğinde fiziksel olarak gerçekleşmesi mümkün olmayacak kadar büyükmektedir. Burada r_{kri} , Kritik Mesafe Eşiğinin değerimizin önemi bir kere daha ortaya çıkmaktadır. r_{kri} değerinin altında tutarsız sonuçların çıkma sebebinin küresel ses dalgalarında ses basıncının uzaklıkla ters orantılı olarak azalımı ilkesinden ($\frac{1}{r}$) kaynaklandığı fiziksel ve matematiksel bir gerçekliktir. Çünkü matematiksel olarak $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} = \infty$ limiti gibi düşündüğümüzde kaynağa yaklaşıldıkça basınç değeri sonsuza yaklaşacaktır. Bu sebeple mantıklı ve tutarlı sonuçlar elde etmek için, Atmosferik Ses Yutumu veya ortamda bulunan yüzeylerin ses yutumu dikkate alınmadan Klasik Logaritmik Yaklaşım ve Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemine göre analiz yapılacaksa mesafe değerleri öncelikli olarak belirtildiği gibi Kritik Mesafe Eşiği, r_{kri} değerinden büyük alınmak zorundadır. ($r > r_{kri} = \sqrt{\frac{Q}{4\pi}}$)

Yakın alanda ses yayılması ile ilgili yapılan hesaplamalardan da net olarak görülebileceği gibi ağırlık fonksiyonu sayısı $N \geq 5$ gibi yüksek adetlere çıktıkça, Klasik Logaritmik Yaklaşım ve Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi, $r_{kri} \leq \sqrt{\frac{Q}{4\pi}}$ kritik mesafe eşiğinin altındaki değerlerde bile oldukça uyumlu sonuçları göstermektedir. Özellikle bu “durum” bağlamında bu eşik değer için $r_{kri} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \approx 0,28$ m olarak

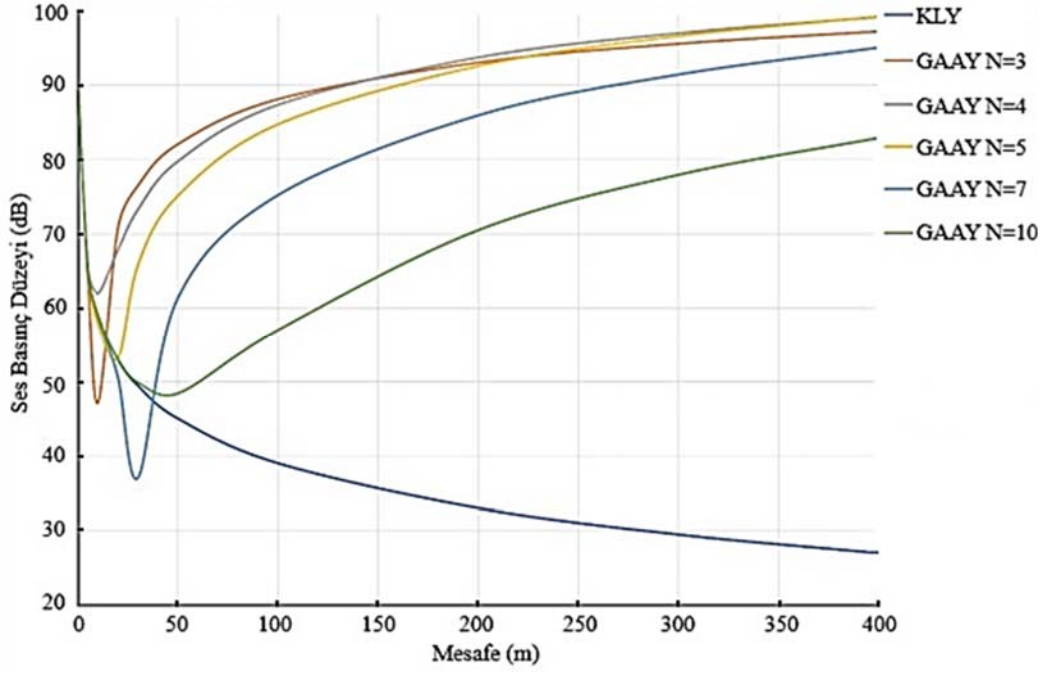
hesaplandığında fiziki olarak tutarsız sonuçlar meydana getirmesi kaçınılmaz olan $r=0,1$ ve $0,2$ m değerlerinde bile Klasik Logaritmik Yaklaşım ve Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminden elde edilen sonuçların birbirleriyle ne kadar yakın değerlere ulaştığı analiz sonuçlarından net olarak görülmektedir.

Kritik mesafe eşiğinin ses yayılımındaki tutarlılık etkisi, Şekil 1’den de kapsamlı olarak gözlemlenebileceği gibi $0 - r_{kri}$ aralığında fiziksel olarak gerçekleşmesi mümkün olmayacak kadar desibel maksimizasyonu sonuçları doğurmaktadır. Bu etki, yapılan tüm analizler çerçevesinde r_{kri} değerinden önce yapılan bütün desibel hesaplamalarının sağlıklı sonuçlar veremeyeceğini görülebilir kılmaktadır. Bu bağlamda en dikkate değer nokta, düşük ağırlık fonksiyonlu, özellikle $N = 3$ yaklaşımındaki gibi, her ne kadar “gerçek” değerlerden sayısal olarak kayda değer sapmalar meydana getirse de $0 - r_{kri}$ aralığında fiziki gerçekliğe en yakın minimizasyon ve yayılım analizleri daha gerçekçi bir ölçüm yaklaşımını tanımlayacaktır.

Uzak Alan ($r \gg 5$) desibel değerleri analiz edildiğinde Şekil 2’den ve tablolardan da görülebileceği gibi dikkate değer farklılıkta sayısal veriler göze çarpmaktadır. Özellikle 10 m mesafe için ağırlık fonksiyonu sayısı $N < 5$ olan desibel analizlerinde değerlerin ciddi anlamda salınımla yaparak “gerçek” değerlerden uzaklaştığı özellikle de $r > 20$ m mesafeler için değerlerin salınımlarının oldukça yüksek olduğu buna bağlı olarak hata payı yüzdelere de oldukça yüksek olduğu net olarak görülmektedir. Bu durum Uzak Alan ses yayılımlarında Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminin özellikle $N \leq 10$ ağırlık fonksiyonu adetli analizler için iyi bir yöntem olmadığını, Sadece $N \gg 10$ değerleri alındığında etkili olabileceğini fakat ağırlık fonksiyonu sayısının ne oranda artırılırsa etkili olmasının tam öngörülemediğini, çok fazla ağırlık fonksiyonu kullanılırsa hesap ekonomisi açısından kullandığımız bilgisayar programında iterasyon sayısı artacağı için zamandan tasarruf etmemizin zor olacağını net olarak göstermektedir.



Şekil 1. Yakın Alan Ses Yayılımında Kritik Mesafe Eşiği Etkisi
(The Critical Distance Threshold Effect on Near Field Sound Propagation)



Şekil 2. Uzak Alan Ses Yayılımında Ağırlık Fonksiyonlarının Etkisi
(Effect of Weight Functions on Far Field Sound Propagation)

Tablo 5. 5 ve 400 m arasındaki Uzak Alan Ses Yayılım Değerleri
(Far Field Sound Propagation Values between 5 and 400 m)

Mesafe (m)	Klasik Logaritmik Yaklaşım (dB)	Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi (dB)				
		N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
5	65,029	63,855	65,085	65,004	65,028	65,030
10	59,008	47,197	61,976	57,761	58,938	59,015
20	52,987	70,823	67,872	53,242	50,567	53,060
30	49,465	76,507	73,294	65,810	37,089	49,912
50	45,029	82,087	79,791	75,148	61,414	48,436
100	39,008	88,128	87,376	84,759	75,233	57,029
200	32,987	93,067	93,732	92,596	85,964	70,499
300	29,465	95,592	97,005	96,618	91,457	77,946
400	26,967	97,252	99,163	99,269	95,082	82,915

Birçok ses kaynağının birlikte çalışarak, belirli düzlemsel ses yönlendirmelerinde ($Q>1$) ve Atmosferik koşullar dikkate alındığında ($A_{atm}>0$) ses yayılmasının meydana getireceği farklı durumlar için ses yayılma analizi değerlendirildiğinde farklı sayısal sonuçların çıkması kaçınılmaz olmaktadır. Bu bağlamda geliştirilmiş “Durum 2” incelenmiştir.

Durum 2:

Açık bir havada düzgün bir zemin üzerinde çalışan birbirleriyle yakın ve herhangi bir düzlemsel ses yutumu olmayan dört adet makine, atmosferik koşullar dikkate alındığında $t=20$ °C ortam sıcaklığı ve bağıl nem oranı %60 olarak ölçülmüştür. Bu makineler sırasıyla, $f_1 = 500$ Hz, $f_2 = 750$ Hz, $f_3 = 1000$ Hz ve $f_4 = 2000$ Hz frekanslarla düzgün ses dalgaları üretmekte ve $L_{w1} = 74$ dB, $L_{w2} = 86$ dB, $L_{w3} = 82$ dB, $L_{w4} = 76$ dB ses şiddeti düzeyleri meydana getirmektedir. Bu makinelerin oluşturmuş olduğu ses alanının 5 m uzaklığındaki ses basıncı düzeyinin Atmosferik Yutum ihmal edilmiş (Tablo 7.) ve edilmemiş Klasik Logaritmik Yaklaşım ve Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemleri analizleri tablolarda görüldüğü gibi olacaktır.

4 adet makinenin birlikte çalışarak ürettiği Toplam Ses Basıncı Düzeyi Denklemi Eş. 20 ile tespit edilmiştir.

$$L_{pt}=10 \log \left(\sum_{i=1}^4 10^{\frac{L_{pi}}{10}} \right) \tag{20}$$

Bu “durumda” net olarak da gözlemlenebileceği gibi ses kaynakları, boşlukta ses üreten kaynak bileşenleri gibi değil, düz bir zeminde yani bir ses yönelmenin etkili olacağı şekilde düşünülmüştür. Düz zemin düşünüldüğü için $Q = 2$ alınması kaçınılmaz olmaktadır. Tablolardan da net olarak görülebileceği gibi atmosferik yutum, özellikle kısa mesafelerde çoklu makine çalışmasında kayda değer bir ses şiddeti etkisi yaratmamaktadır. Mesafe değerleri yüksek alındığında atmosferik yutum değerleri dikkate değer bir hal alacaktır. Fakat diğer “durumda” belirtildiği gibi mesafe artışı Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminde ciddi bir stabilizasyon problemine yol açıp bulunan değerlerde salınım etkisi meydana getireceği için Klasik Logaritmik Yaklaşım ile arasında ciddi Hata Payı Yüzdesi artışlarına sebebiyet verecektir. Atmosferik yutumun ihmal edildiği Tablo 7. ve ihmal edilmediği Tablo 8. değerlerindeki fark oranı yüzdesi Tablo 9. da değerlendirilmiştir. Burada ilk göze çarpan etmen, özellikle frekans

Tablo 6. Uzak Alan Hata Payı Yüzdeleri (Far Field Error Percentages)

Mesafe (m)	Hata Payı (%)				
	N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
5	1,81%	-0,09%	0,04%	0,00%	0,00%
10	20,02%	-5,03%	2,11%	0,12%	-0,01%
20	-33,66%	-28,09%	-0,48%	4,57%	-0,14%
30	-54,67%	-48,17%	-33,04%	25,02%	-0,90%
50	-82,30%	-77,20%	-66,89%	-36,39%	-7,57%
100	-125,92%	-124,00%	-117,29%	-92,87%	-46,20%
200	-182,13%	-184,15%	-180,70%	-160,60%	-113,72%
300	-224,42%	-229,22%	-227,90%	-210,39%	-164,53%
400	-260,64%	-267,72%	-268,12%	-252,59%	-207,47%

Tablo 7. 4 adet makinenin birlikte çalışarak ürettiği 5 m mesafedeki ses değerleri ($A_{atm}=0$, $Q=2$)
(Sound intensity values at a distance of 5 m produced by 4 machines working together ($A_{atm} = 0$, $Q = 2$))

Makineler, Frekans, Ses Düzeyi	Klasik Logaritmik Yaklaşım (dB)	Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi (dB)				
		N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
Makine 1, 500 Hz, 74 dB	52,039	50,865	52,096	52,014	52,038	52,040
Makine 2, 750 Hz, 86 dB	64,039	62,865	64,096	64,014	64,038	64,040
Makine 3, 1000 Hz, 82 dB	60,039	58,865	60,096	60,014	60,038	60,040
Makine 4, 2000 Hz, 76 dB	54,039	52,865	54,096	54,014	54,038	54,040
Toplam Ses Basıncı Düzeyi, L_{pt}	65,973	64,800	66,030	65,948	65,973	65,975

Tablo 8. 4 adet makinenin birlikte çalışarak ürettiği 5 m mesafedeki ses değerleri ($A_{atm}\neq 0$, $Q=2$)
(Sound intensity values at a distance of 5 m produced by 4 machines working together ($A_{atm}\neq 0$, $Q=2$))

Makineler, Frekans, Ses Düzeyi	Klasik Logaritmik Yaklaşım (dB)	Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi (dB)				
		N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
Makine 1, 500 Hz, 74 dB	52,037	50,863	52,094	52,012	52,037	52,039
Makine 2, 750 Hz, 86 dB	64,035	62,861	64,092	64,010	64,034	64,037
Makine 3, 1000 Hz, 82 dB	60,033	58,858	60,089	60,007	60,031	60,034
Makine 4, 2000 Hz, 76 dB	54,014	52,837	54,067	53,986	54,010	54,016
Toplam Ses Basıncı Düzeyi, L_{pt}	65,968	64,793	66,024	65,942	65,967	65,969

Tablo 9. 4 adet makinenin birlikte çalışarak ürettiği 5 m mesafedeki fark oranları
(Difference ratios at a distance of 5 m produced by 4 machines working together)

Makineler, Frekans, Ses Düzeyi	Fark Oranları (%)					
	Klasik Logaritmik Yaklaşım (dB)	Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi (dB)				
		N=3	N=4	N=5	N=7	N=10
Makine 1, 500 Hz, 74 dB	0,15%	0,18%	0,18%	0,18%	0,18%	0,15%
Makine 2, 750 Hz, 86 dB	0,35%	0,40%	0,40%	0,40%	0,40%	0,35%
Makine 3, 1000 Hz, 82 dB	0,62%	0,71%	0,71%	0,71%	0,71%	0,62%
Makine 4, 2000 Hz, 76 dB	2,47%	2,82%	2,82%	2,82%	2,82%	2,47%
Toplam Basıncı Düzeyi L_{pt}	0,54%	0,62%	0,62%	0,62%	0,62%	0,54%

değeri yüksek ve ses düzeyi düşük kaynaklarda atmosferik yutum değerini ihmal ettiğimizde sapmanın çok yüksek oluşudur. Özellikle Makine 4, frekans yüksekliği ve ses şiddeti düşüklüğü sebebiyle en yüksek atmosferik yutumu içerdiği net bir gerçekliktir.

4. Simgeler (Symbols)

∇	: Nabla operatörü (Gradient),
Δ	: Küresel koordinatlar için Laplasyen operatörü,
R	: Yarıçap koordinatı,
θ	: Enlem açısı koordinatı (Azimut),
ϕ	: Boylam açısı koordinatı (Zenit).
p_o	: Basınç genlik değeri,
Ψ	: Dalga fonksiyonu,
R	: Radyal (Yarıçap) fonksiyonu,
Φ	: Boylam açısı (Azimut) fonksiyonu,
Θ	: Enlem açısı (Zenit) fonksiyonu,
T	: Zaman fonksiyonu,
\hat{I}	: Sanal Sayı ($\sqrt{-1}$),
K	: Dalga sayısı ($\frac{\omega}{c}$),
P_{+}	: Sağa ve sola giden dalgaların basınç genlikleri,
ω	: Açısal hız,
$h_{1,2}$: Sağ ve Sol Hankel fonksiyonları,
j_0	: Birinci Türden Küresel Bessel Fonksiyonları,
Y_0	: İkinci Türden Küresel Bessel Fonksiyonları,
Y_l^m	: Küresel Harmonik Fonksiyon,
M	: Boylam Katsayısı,
l	: Enlem Katsayısı,
R	: Artık Fonksiyonu,
$[W]_{N \times 1}$: Ağırlık Fonksiyonu Vektörü,
N	: Ağırlık Fonksiyonu Sayısı,
n	: İntegral Sınır Değerleri,
L	: Diferansiyel Operatörü,
P_{in}	: Başlangıç Ses Basıncı Koşulu,
p_0	: Referans Basıncı ($20 \mu Pa$)
L_P	: Kaynaktan Belirli Bir Uzaklıktaki Ses Basıncı Düzeyi (dB),
L_w	: Kaynağın Ses Şiddeti Düzeyi (dB),
Q	: Yönelme Katsayısı 2^n ,
n	: Yansıtıcı Yüzey Adeti,
r	: Mesafe (m).
r_{kri}	: Kritik Mesafe Eşiği
A_{atm}	: Havanın Yutma Etkisi ile Ses Basıncındaki Azalma (dB),
f	: İletilen Sesin Frekansı (Hz),
\emptyset	: Havadaki Bağlı Nem Miktarı (%),
L_{pt}	: Toplam Ses Basıncı Düzeyi (dB).

4.1. Kısaltmalar (Abbreviations)

GAAY	: Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi,
WRM	: Galerkin Weighted Residues Method,
KLY	: Klasik Logaritmik Yaklaşım

5. Sonuçlar (Conclusions)

Bu çalışmada küresel koordinatlara dayalı ses denklemlerinden türetilen ses şiddeti düzeylerinin hesaplanmasında literatürde çok nadir olarak ele alınan fakat birçok kısmi türevli diferansiyel denklemlere dayalı fiziksel problemlerin çözümünde etkili bir şekilde kullanılan Semi-Analitik bir matematiksel çözüm yöntemi olan Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemi kaynaklı çözümler tespit edilmiş ve literatürde yaygın olarak kabul gören, ses yayılımının hem matematiksel hem de fiziksel analizinde önemli bir yer edindiği için yaygın olarak kabul görerek kullanılan Klasik Logaritmik Yaklaşım

çözümlerinden elde edilen referans değerler ile sayısal karşılaştırmalar yapılmıştır.

Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminin önemi farklı fiziksel “durum” yaklaşımlarında vurgulanmış, ayrıca yapılan karşılaştırmalar baştan da belirtildiği gibi ses yayılımının hem matematiksel hem de fiziksel analizlerinde önemli bir yer aldığı için Klasik Logaritmik Yaklaşım çözümlerinden elde edilen referans değerlerin ses kaynaklarının yayılım analizlerinde gerçekçi sonuçlara daha yakın çıkmakta ve etkili olabilecek bir çözüm yöntemi olduğu net olarak gösterilebilmiştir.

Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemine göre ses şiddeti düzeyinin (dB) elde edilmesinde çok önemli bir parametre olan P_r değerinin bulunmasını sağlayan kısaca ses basıncı değerinin temelini oluşturan $P(\tau)$ fonksiyonunun ağırlık fonksiyonlarına dayalı polinomik dizaynında, başka bir biçimde ifade edilirse yaklaşık olarak sayısal ve fonksiyonel olarak belirlenmesinde yani N ağırlık fonksiyonu adedinin mesafenin logaritmik domain parametresi olan τ değerine bağlı olarak τ^N ağırlık fonksiyonlarına bağlı olarak belirlemesi için ve bunlara bağlı Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemini artık ve ağırlık fonksiyonu integral denklemlerinin oluşma sayısında ve çözümlenme sonucu elde edilen c katsayı değerlerinin sayısal etkisi net olarak gözlemlenebilmiştir.

Hata Yüzdelerinin, özellikle $N \geq 5$ yani uzak değerler alınmadığında $N = 10$ ağırlık fonksiyonu adetlerinin söz konusu olduğunda daha küçük çıkmakta ve daha güvenilir sayısal veriler elde edilebilmekte olduğu net olarak görülebilmıştır.

Kritik Mesafe Eşiği (r_{kri}), değerinin yakın mesafelerde fiziksel olarak daha gerçekçi sayısal değerler ortaya çıkmasına yardımcı olduğu gösterilmiş, ayrıca küresel harmonik fonksiyonların önemi anlaşıldıktan sonra onlara bağlı olarak tanımlanmış bu değerlerin hem uzak hem de yakın değerler için Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminden üretilmiş değerler ile çarpımının ses basınç düzeylerinde oldukça önemli olması gereken bir sayısal parametre olduğu vurgulanmıştır.

Uzak mesafelerde Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yönteminin yüksek miktarda sağlıklı sonuçlar verebilmesi için çok miktarda N ağırlık fonksiyon adetlerinin alınması gerektiği, ayrıca düşük sayıda değerler Klasik Logaritmik Yaklaşım bağlamında uyumlu sonuçlar veremediği net olarak gösterilmiştir.

Çoklu makine çalışmasında yönelme katsayısı Q değerinden bağımsız olarak kısa mesafeli analizlerin etkili olabilmesi için makinelerin ses frekans miktarlarında yüksek değerlerin tercih edilmemesi bu bağlamda atmosferik yutuma bağlı olan değerlerin elde edildikten sonra tutarlı sonuçlar elde edilmesinde problem yaratabilecek ölçekte olduğu analiz edilmiştir.

Bu çalışmada analiz yöntemi olarak kullanılmış olan Galerkin Ağırlıklı Artıklar Yöntemine göre Semi-analitik tipteki çözümler bağlamında elde edilen sonuçların önemi vurgulanmış ve birçok fiziksel problemlerden elde edilmiş kısmi türevli diferansiyel denklemler için iyi ve en önemli sayısal çözüm metodunda olan bu matematiksel yönteminin sese dayalı fiziki matematiksel problemlerin çözümlerinde yaşanacak sorunların ortaya çıkması net olarak gösterilmiştir. Yakın mesafe çalışmalarında yüksek miktarda ağırlık fonksiyonu kullanılarak çok miktarda sağlıklı sonuçlar elde edilebildiği fakat ağırlık fonksiyonu sayısı düşük alındığında sağlıklı sonuçlar almanın zor elde edilebildiği gösterilmiştir. İlerde birçok araştırmacının bu tip konulara odaklanması kaçınılmaz olarak öngörülebilir kılınmaktadır. Bu sebeple mevcut bağlamda klasik olarak kullanılan logaritmik denklem (Klasik Logaritmik Yaklaşım) ve yeni olarak geliştirilebilecek matematiksel ve fiziksel yöntemlerin

fiziki anlamda gerçek ses basınç düzeylerinin ölçülmesine belki de yeni katkılarının eklenmesi kaçınılmaz olabilecek ve Akustik bilimine yeni katkılarının ortaya çıkmasına destek olması kaçınılmaz olacaktır.

Kaynaklar (References)

1. Federal University of Technology, Akure, Nigeria. Basic Concepts in Architectural Acoustics Environmental Control (Acoustics and Noise Control) Lecture Notes. <https://www.slideserve.com/kalin/basic-concepts-in-architectural-acoustics-environmental-control-iii-acoustics-and-noise-control>. Yayın tarihi Temmuz 26, 2014. Erişim tarihi Ağustos 31, 2022.
2. Skudrzyk E., The Foundations of Acoustics, New York: Springer Press. ISBN: 978-3-7091-8255-0, 1971.
3. Muller G., Moser M., Handbook of Engineering Acoustics, München & Berlin: Springer Press. ISBN: 978-3-540-69460-1(Translation of the German Standard Book), 2013.
4. Williams E.G., Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography. London: Academic Press, The Journal of the Acoustical Society of America, Published Online, September 2000.
5. Eversman W., Vo P. T., A Method of Weighted Residuals with Trigonometric Basis Functions for Sound Transmission in Circular Ducts, Journal of Sound and Vibration 56 (2), 243-250, 1978.
6. Eversman W., Cook E. L., and Beckemeyer R. J., A Method of Weighted Residuals for the Investigation of Sound Transmission in Non-Uniform Ducts Without Flow. Journal of Sound and Vibration 38, 105-123, 1974.
7. Eversman W., A multimodal solution for the transmission of sound in non-uniform ducts., American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper 76-497, 1976.
8. Eversman W., Computation of axial and transverse wave numbers for uniform two-dimensional ducts with flow using a numerical integration scheme., Journal of Sound and Vibration 41, 252-255, 1975.
9. Eversman W., Initial Values for the Integration Scheme to Compute the Eigenvalues for Propagation in Ducts, Journal of Sound and Vibration 50, 159-162, 1977.
10. Eversman W., The Effect of Mach Number on The Tuning of an Acoustic Lining in A Flow Duct, Journal of the Acoustical Society of America 48, 425-428, 1970.
11. Park M., Rafaely B., Sound-Field Analysis by Plane-Wave Decomposition Using Spherical Microphone Array, J. Acoust. Soc. Am., 118, 3094-3103, 2005.
12. Williams E.G., Valdivia N. and Herdic P.C., Volumetric Acoustic Vector Intensity Imager, J. Acoust. Soc. Am., 120, 1887-1897, 2006.
13. Williams E.G., Takashima K., Vector Intensity Reconstructions in A Volume Surrounding A Rigid Spherical Microphone Array, J. Acoust. Soc. Am., 127, 773-783, 2010.
14. Jacobsen F., Moreno-Pescador G., Fernandez-Grande E., Hald J., Near Field Acoustic Holography with Microphones on A Rigid Sphere, J. Acoust. Soc. Am., 129, 3461-3464, 2011.
15. Rafaely B., Plane-Wave Decomposition of The Sound Field on A Sphere by Spherical Decomposition, J. Acoust. Soc. Am., 116, pp. 2149-2157, 2004.
16. Rafaely B., Analysis and Design of Spherical Microphone Array, IEEE Trans. Speech Audio Process., 13, 135-143, 2005.
17. Battista G., Chiariotti P. and Castellini P., Spherical Harmonics Decomposition in Inverse Acoustic Methods Involving Spherical Arrays, Journal of Sound and Vibration, 433, 2018, 425-460, 2018.
18. Koutny A., Jiricek O. and Thomas J., Source Distance Determination Based on The Spherical Harmonics, Mechanical Systems and Signal Processing, 85, 993-1004, 2017.